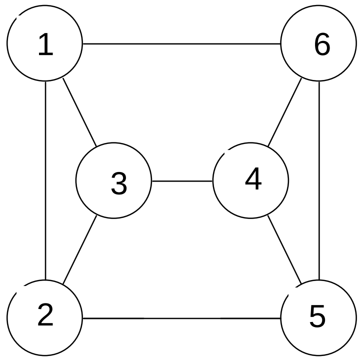
FÜMO 26 1. Runde Lösungen 5. Klasse

Aufgabe 1 Wie geht‘s



a) Siehe Abbildung! Die Summe in den Vierecken beträgt jeweils 14 = 1 + 6 + 5 + 2 = 1 + 6 + 3 + 4 = 3 + 4 + 2 + 5

b) Da die Summe des linken Dreiecks genauso groß sein soll wie die Summe des rechten Dreiecks, muss die Summe aller einzutragenden Zahlen gerade sein.
Jede Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen ist aber ungerade, da sie drei gerade Zahlen und drei ungerade Zahlen enthält.

Aufgabe 2 Abstand halten

a) Unter den vier Zahlen 2010, 2014, 2019 und 2023 sucht man diejenigen, für die die Differenz 2 + 7 = 9 oder 7 – 2 = 5 oder 7 – 5 = 2 (tritt nicht auf) beträgt:
(1) 2019 und 2010, also ist n = 2012 oder n = 2017
(2) 2014 und 2023, also ist n = 2016 oder n = 2021
(3) 2014 und 2019, also ist n = 2012 oder n = 2021
n kann also die Werte 2012, 2016, 2017 und 2021 annehmen.

b) Mögliche Abstände zweier Zahlen sind: 4, 5, 9 und 13.
Liegt n zwischen zwei dieser Zahlen, muss ihre Entfernung **4**, 8, 12, … betragen.
D.h. n = 2010 + 1 = **2011** = 2014 – 3 oder n = 2010 + 3 = **2013** = 2014 – 1 oder
n = 2019 + 1 = **2020** = 2023 – 3 oder 2019 + 3 = **2022** = 2023 – 1.
Ist n kleiner oder größer als die beiden Zahlen, muss ihre Entfernung 2, **4**, 6, …. betragen.
D.h. n = 2010 – 2 = **2008** = 2014 – 6 oder 2010 + 6 = **2016** = 2014 + 2 oder
n = 2019 – 2 = **2017** = 2023 – 6 oder 2019 + 6 = **2025** = 2023 + 2.
Lösungen für n sind also 2008, 2011, 2013, 2016, 2017, 2020, 2022 und 2025.

Aufgabe 3 Fehlende Zahlen

(x;y) bedeutet das Feld in Zeile x und Spalte y.

a) In (1; 6) muss eine 2 stehen, da in den Feldern der zugehörigen Diagonale wegen der 2 in (2;1) und der 2 in (4;4) keine 2 mehr stehen kann.

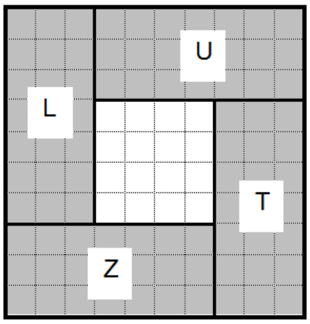
b) In (5;3) muss eine 2 stehen, da in der Zeile 5 wegen der 2 in (2;1), der 2 in (4;4) und der 2 in (1:6) keine 2 mehr stehen kann.

c) Siehe Abbildung!

6	3	**1**	5	4	2
2	5	3	1	6	4
5	6	4	3	2	**1**
4	1	5	**2**	**3**	6
3	**4**	2	6	1	5
1	2	6	4	**5**	3

FÜMO 26 1. Runde Lösungen 6. Klasse

Aufgabe 1 LUTZ-Quadrate



a) Seien a und b die Seiten aller vier Rechtecke mit $a > b$, dann gilt für jede der vier Seiten s des inneren Rechtecks: $s = a – b$.
b) Es gibt vier LUTZ-Quadrate der Seitenlänge 10: a=9, b=1; a=8, b=2; a=7, b=3 und a=6, b=4. Es gibt dabei vier verschieden große innere Quadrate.
c) Es gibt 1008 LUTZ-Quadrate:
a=2016, b=1; a=2015, b=2, …, a= 1009, b=1008.
d) Für das LUTZ-Quadrat mit der Seitenlänge 12 und a = 7 und b = 5 gilt:
$A(Q) = 12^2 = 144 = 36 \cdot 2^2 = 36 \cdot A(\text{inneres Quadrat})$.

Aufgabe 2 Dreistellige Zebrazahlen

a) Dreistellige Zebra-Zahlen haben die Form aba mit $a,b \in N$; $0 < a < 10$; $0 \le b < 10$; $a \neq b$.
Damit gibt es für a und b jeweils 9 Möglichkeiten.
Also beträgt die Anzahl der dreistelligen Zebra-Zahlen $9 \cdot 9 = 81$.
b) Es ist die Summe S = 101 + 121 + 131 + . . . + 202 + 212 + . . . + 969 + 979 + 989 zu ermitteln.
Um diese Summe der 81 Zahlen zu ermitteln, machen wir es wie der kleine Carl Friedrich Gauss.
Dazu sortieren wir die Summanden um:
Es sei S′ = (101 + 989) + (121 + 979) + (131 + 969) + . . . + (535 + 565) + (545 + 545).
Das sind 41 Paare von denen 5 die Summe 1090 haben, nämlich (101+ 989), (212+ 878), (323 + 767), (434 + 656), (545 + 545).
Die restlichen 41 − 5 = 36 Paare haben jeweils die Summe 1100. (z.B. 121 + 979).
Also gilt für die gesuchte Summe $S = 5 \cdot 1090 + 36 \cdot 1100 - 545 = 5450 + 39600 - 545 = 44505$.
(Die 545 wurde doppelt gezählt und muss also einmal abgezogen werden.)

Eine andere Lösung könnte so aussehen:
$S = 9 \cdot (101 + 202 + \ldots + 909) + 8 \cdot (10 + 20 + \ldots + 90) =$
$9 \cdot (100 + 200 + \ldots + 900 + 1 + 2 + \ldots 9) + 80 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) =$
$900 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) + 9 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) + 80 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 989 \cdot 45 = 44505$

Aufgabe 3 Ali, Oli und Uli

Ali und Oli sind jetzt zusammen 13 Jahre alt. (1)

In einem Jahr werden Ali und Uli zusammen 20 Jahre alt sein, also sind Ali und Uli jetzt zusammen 18 Jahre alt. (2)

Oli und Uli werden in zwei Jahren zusammen 29 Jahre alt sein, also sind Oli und Uli jetzt zusammen 25 Jahre alt. (3)

In der Summe 13 + 18 + 25 = 56 kommt das derzeitige Alter eines jeden der drei genau zweimal vor. Also müssen Ali, Oli und Uli jetzt zusammen 56:2 = 28 Jahre alt sein.

Leicht findet man

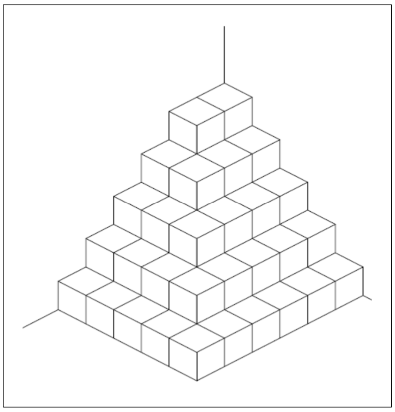
mit Hilfe von (3): Ali ist jetzt 28 - 25 = 3 Jahre, also in drei Jahren 6 Jahre alt,

mit Hilfe von (2): Oli ist jetzt 28 - 18 = 10 Jahre, also in drei Jahren 13 Jahre alt und

mit Hilfe von (1): Uli ist jetzt 28 - 13 = 15 Jahre, also in drei Jahren 18 Jahre alt.

FÜMO 26 1. Runde Lösungen 7. Klasse

Aufgabe 1 Hoch stapeln



a) Einfaches Abzählen ergibt N = 6·5 + 5·4 + 4·3 + 3·2 + 2·1 = 70 Klötze.
b) Auch hier hilft genaues Zählen.
Wir stellen die Ergebnisse in einer Tabelle dar:

Rote Flächen	0	1	2	3
Würfel	40	0	25	5

c) Es gibt insgesamt 6·70 = 420 Würfelflächen.
Davon sind nach b) 2·25 + 3·5 = 65 rot.
Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{65}{420} = \frac{13}{84}$.

Aufgabe 2 Wer steht bis zuletzt?

a) 26 Zahlen: 1 , ~~2~~ , 3 , ~~4~~ , … 25 , ~~26~~
Es stehen noch die 13 Kinder, deren Zahlen bei Teilung durch 2 den Rest 1 lassen
13 Zahlen: 1 , ~~3~~ , 5 , ~~6~~ , … ~~23~~ , 25
Es stehen noch die 7 Kinder, deren Zahlen bei Teilung durch 4 den Rest 1 lassen
7 Zahlen: ~~1~~ , 5 , ~~9~~ , 13 , ~~17~~ , 21 , ~~25~~
Es stehen noch die 3 Kinder, deren Zahlen bei Teilung durch 8 den Rest 5 lassen
3 Zahlen: 5 , ~~13~~ , 21, 2 Zahlen: ~~5~~, 21
Der Teilnehmer, der als letztes noch steht, hat die Nummer 21

b) analog:
2017 Zahlen: 1 , ~~2~~ , 3 , ~~4~~, … , ~~2016~~ , 2017,
1009 Zahlen: ~~1~~, 3 , ~~5~~ , 7 , … , 2015 , ~~2017~~
504 Zahlen: 3 , ~~7~~ , 11 , ~~15~~ , … , 2011 , ~~2015~~,
252 Zahlen: 3 , ~~11~~ , 19 , ~~27~~ , … 2003 , ~~2011~~
126 Zahlen: 3 , ~~19~~ , 35 , ~~51~~ , … 1987 , ~~2003~~,
63 Zahlen: 3 , ~~35~~ , 67 , ~~99~~ , … ~~1955~~ , 1987
32 Zahlen: ~~3~~ , 67 , ~~131~~ , 195 , …~~1923~~ , 1987,
16 Zahlen: ~~67~~ , 195 , ~~323~~ , … ~~1859~~ , 1987
8 Zahlen: ~~195~~ , 451 , ~~707~~ , … ~~1731~~ , 1987,
4 Zahlen: ~~451~~, 963 , ~~1475~~, 1987
2 Zahlen: ~~963~~ , 1987
Der Teilnehmer, der als letztes noch steht, hat die Nummer 1987

.Aufgabe 3 Starke Potenzen

Die Zahl 9^{2017} endet auf 9, da 2017 ungerade ist und die Endziffer immer zwischen 9 und 1 wechselt.

Damit muss n^{2018} auf 9 enden.

Das ist nur bei der n = 3 (Zyklus: 3; 9; 7; 1) und bei der n = 7 (Zyklus: 7; 9; 3; 1) möglich.

Da 2018 = 4·504 + 2, endet sowohl 3^{2018} als auch 7^{2018} auf 9.

Also endet $9^{2017} - n^{2018}$ auf 0 und ist damit durch 10 teilbar.

FÜMO 26 1. Runde Lösungen 8. Klasse

Aufgabe 1 26° im 2017-Eck

Die Winkelsumme im konvexen 2017-Eck beträgt 2015·180° = 362700°.
Die gesuchte Anzahl der Winkel mit der Größe 26° sei x. Da es sich um ein konvexes 2017-Eck handelt, ist jeder der 2017 Innenwinkel kleiner als 180°.
Also gilt:

$362700 - x \cdot 26 < 180 \cdot (2017 - x)$

$362700 - x \cdot 26 < 363060 - 180 \cdot x$

$180 \cdot x - x \cdot 26 < 360$

$154 \cdot x < 360$

$\Rightarrow \quad x < 2{,}33$

Also kann ein konvexes 2017-Eck höchstens zwei Innenwinkel der Größe 26° haben.

Aufgabe 2 2017 versteckt

Die Zahl bzw. Teilzahl „2017“ ist 13 mal in den folgenden Zahlen enthalten:
2017, 12 017, 22 017 sowie von 20 170 bis 20 179.
Der Ausschnitt „2017“ kann aber auch zu zwei verschiedenen Zahlen gehören.
Wir unterscheiden dabei drei Fälle:

2|017 Dies ist aber nicht möglich, da die zweite Zahl eines betrachteten Paares nicht mit „0“ fortgesetzt werden kann.

20|17 Diese Anordnung kann insgesamt 11mal auftreten und zwar zwischen 1720|1721, 17 020|17 021 bis 17 920|17 921.

201|7 Diese Kombination gibt es nur einmal, nämlich in 7201|7202.

Damit erscheint in der Computerzeile insgesamt 13+11+1 = 25 mal die Zahlenkombination 2017 in dieser Reihenfolge.

Aufgabe 3 Besonders folgsam

Seien $a = m(m+1)$ und $b = n(n+1)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$ zwei folgsame Zahlen.
Dann soll gelten: $ab = m(m+1)n(n+1) = x(x+1)$ mit $x \in \mathbb{N}$

Zu zeigen ist nun, dass es zu jedem m ein geeignetes n und x gibt, das diese Bedingung erfüllt.

Der Term $m(m+1)n(n+1)$ beschreibt eine folgsame Zahl, wenn gilt:

$$(1)\ \ x = m(n+1) \quad \text{und} \quad (2)\ \ x + 1 = n(m+1)\ .$$

(1) in (2) eingesetzt, ergibt $m(n+1) + 1 = n(m+1)$ bzw. $mn + m + 1 = nm + n$ bzw. $n = m + 1$.

Für $n = m + 1$ sind beide Bedingungen erfüllt und es gilt für $a = m(m+1)$ und $b = (m+1)(m+2)$

$$x(x+1) = m(m+2)(m+1)^2 = (m^2 + 2m)(m^2 + 2m + 1).$$

Also kann man zu jeder folgsamen Zahl $a = m(m+1)$ mit $m \in \mathbb{N}$ eine zweite folgsame Zahl $b = (m+1)(m+2)$ angeben, so dass ihr Produkt $a \cdot b$ wieder eine folgsame Zahl ist.

Bemerkung: Das Produkt einer folgsamen Zahl mit der nächstgrößeren folgsamen Zahl ist also wieder eine folgsame Zahl. Daraus folgt aber auch, dass das Produkt einer folgsamen Zahl mit der vorhergehenden folgsamen Zahl auch wieder eine folgsame Zahl ist.

Bsp.: Für 3·4 = 12 und 4·5 = 20 ist das Produkt 3·4·4·5 = 15·16 wieder folgsam. Ebenso ist aber auch für 2·3 = 6 und 3·4 = 12 das Produkt 2·3·3·4 = 8·9 wieder folgsam.