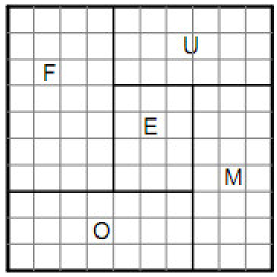
Vierundzwanzigste Fürther **M**athematik-**O**lympiade in **Ei**chstätt

Klassenstufe 5
Die Aufgaben der 2. Runde

Aufgabe 1 FÜMO im Quadrat

Lutz zerlegt ein Quadrat der Seitenlänge 10 längs der Gitterlinien in fünf Rechtecke F, U, E, M und O so, dass gilt (Beispiel siehe Abbildung):

(1) Die Rechtecke F, U, M und O haben mit dem Quadrat jeweils eine Ecke gemeinsam.
(2) Das Rechteck E berührt nicht den Quadratrand.



a) Lutz zeichnet eine Zerlegung, für die gilt:
Der Flächeninhalt von U beträgt 32 und der von O beträgt 14.
Wie groß ist in diesem Fall der Flächeninhalt von E?

b) Finde eine Zerlegung, bei der der Flächeninhalt von E und O zusammen möglichst groß ist. Begründe, warum dieser Flächeninhalt nicht größer sein kann.

Aufgabe 2 Ziffernzahlen

Simon betrachtet nur zehnstellige Zahlen, die mindestens einmal die 0 enthalten, z.B. 2500015100.
Er schreibt nun der Reihe nach auf, wie oft in dieser Zahl die Ziffern von 0 bis 9 vorkommen.

Für 2500015100 erhält Simon:

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl	5	2	1	0	0	2	0	0	0	0

Die dabei entstehende Zahl 5210020000 nennt Simon die Ziffernzahl von 2500015100.

a) Welche Zahlen haben die gleiche Ziffernzahl 8000000002?
b) Simon findet eine zehnstellige Zahl, die eine Ziffernzahl ohne 0 ergibt. Welche könnte das sein?
c) Gib eine Zahl an, die mit ihrer Ziffernzahl übereinstimmt.
d) Simon beginnt mit der Zahl 8100000001. Er wendet sein Verfahren 2016-mal an.
Welche Zahl erhält er?

Aufgabe 3 2016 Beine

Im Land Polypedia gibt es drei Arten von Bewohnern: die Tredis mit drei, die Quadris mit vier und die Pentis mit fünf Beinen. Bei der letzten Volkszählung wird festgestellt:
(1) Von jeder Art gibt es mindestens fünf Einwohner.
(2) Alle Einwohner von Polypedia haben zusammen genau 2016 Beine.

a) Wie viele Bewohner kann es in Polypedia maximal geben?
b) Wie viele Bewohner hat Polypedia, wenn es gleich viele Tredis, Quadris und Pentis gibt?
c) Wie viele Tredis kann es maximal in Polypedia geben, wenn das Land 620 Bewohner hat?

Letzter Abgabetermin für die 2. Runde ist der 15.4.2016

Für jede Aufgabe muss ein gesondertes Blatt DIN A4 verwendet werden, das jeweils mit Namen, Klasse und Schule zu beschriften ist. Bitte heftet die Lösungsblätter mit einer Büroklammer zusammen. Zu einer vollständigen Lösung gehören die Angabe aller wesentlichen Zwischenschritte und vor allem **ausführliche Begründungen.**

Den Lösungen ist folgender Abschnitt unterschrieben beizulegen:

✂---

Ich nehme / Wir nehmen an der 2. Runde der 24. Fürther Mathematik-Olympiade (2015/2016) in Eichstätt für die 5. Klasse teil:

Vorname(n), Name(n): ____ Klasse: _______

Schule/Ort: ____

Ich bestätige/ Wir bestätigen hiermit, alle Aufgaben selbstständig gelöst zu haben.

Unterschrift(en):____

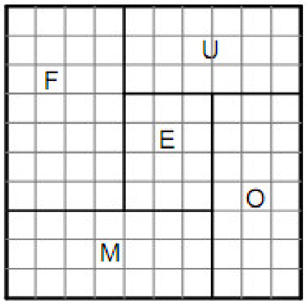
Vierundzwanzigste Fürther **M**athematik-**O**lympiade in **Ei**chstätt

Klassenstufe 6
Die Aufgaben der 2. Runde

Aufgabe 1 Fünf Rechtecke im Quadrat

Lutz zerlegt ein Quadrat der Seitenlänge 10 längs der Gitterlinien in fünf Rechtecke F, U, E, M und O so, dass gilt (Beispiel siehe Abbildung):

(1) Die Rechtecke F, U, O und M haben mit dem Quadrat jeweils eine Ecke gemeinsam.
(2) Das Rechteck E berührt nicht den Quadratrand.



Von allen fünf Rechtecken soll U den größten Flächeninhalt und M den größten Umfang haben. Zeichne jeweils eine Zerlegung, in der

a) U den Flächeninhalt 30 hat. b) U einen Flächeninhalt kleiner als 30 besitzt.

Beschreibe ausführlich, wie du die beiden Zerlegungen gefunden hast.

Aufgabe 2 Bowle

Vater mischt für eine Geburtstagsparty zwei Liter Kirschbowle mit einem Zuckergehalt von 12% (Volumenanteil). Zum Verdünnen hat er einen Krug mit einem Liter Mineralwasser bereitgestellt. Um den Zuckergehalt zu senken, gießt die Mutter heimlich einen halben Liter der Bowle in den Krug mit Wasser, rührt kräftig um und schüttet dann einen halben Liter dieser Mischung zurück in das Bowlegefäß.

a) Welchen Zuckergehalt hat nun die Bowle und welchen das Gemisch im Krug?
b) Ist nun mehr Wasser im Bowlegefäß als Bowle im Krug?

Aufgabe 3 Kalenderbruch

Im Bruch $\dfrac{F\cdot E\cdot B\cdot R\cdot U\cdot A\cdot R}{M\cdot A\cdot I}$ sollen die Buchstaben in den Produkten im Zähler und Nenner durch einstellige Zahlen 1, 2, bis 9 ersetzt werden. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben durch unterschiedliche Zahlen ersetzt werden.

a) Bestimme den größtmöglichen Wert des Bruches.

b) Welchen kleinsten Wert kann der Bruch annehmen?

c) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben des Ausgangsbruchs so zu ersetzen, dass der Bruch den Wert 2 hat?

Letzter Abgabetermin für die 2. Runde ist der 15.4.2016

Für jede Aufgabe <u>muss</u> ein gesondertes Blatt DIN A4 verwendet werden, das jeweils mit Namen, Klasse und Schule zu beschriften ist. Bitte heftet die Lösungsblätter mit einer Büroklammer zusammen. Zu einer vollständigen Lösung gehören die Angabe aller wesentlichen Zwischenschritte und vor allem **ausführliche Begründungen.**

Den Lösungen ist folgender Abschnitt unterschrieben beizulegen:

Ich nehme / Wir nehmen an der 2. Runde der 24. Fürther Mathematik-Olympiade (2015/2016) in Eichstätt für die 6. Klasse teil:

Vorname(n), Name(n): ____ Klasse: ________

Schule/Ort: ____

Ich bestätige/ Wir bestätigen hiermit, alle Aufgaben selbstständig gelöst zu haben.

Unterschrift(en):____

Vierundzwanzigste Fürther **M**athematik-**O**lympiade in **Ei**chstätt

Klassenstufe 7
Die Aufgaben der 2. Runde

Aufgabe 1   Gespiegelte Zahlen

Kolja multipliziert eine positive fünfstellige Zahl n mit 9. Erstaunt stellt er fest, dass er als Ergebnis seiner Multiplikation die Spiegelzahl von n erhält. Wie lautet Koljas Zahl? Beschreibe genau, wie du sie gefunden hast.

Hinweis: Eine Spiegelzahl zu einer mehrstelligen natürlichen Zahl erhält man, wenn man ihre Ziffern in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt, z.B. ist 4321 die Spiegelzahl zu 1234.
Hinweis: Eine Zahl, die auf 0 endet, hat keine Spiegelzahl.

Aufgabe 2   Locker am Barhocker

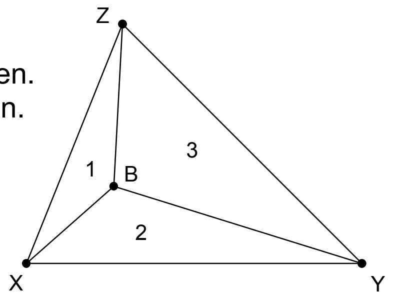
Ein durstiger Mann sitzt an einer Bar. Nach fünfzehn Minuten hat er bereits dreiviertel seines Bargeldes ausgegeben. Er besitzt **jetzt** nur noch halb so viele Euro wie er vorher Cent und genauso viele Cent wie er anfangs an Euro dabei hatte.
Wie teuer kam ihm der Barbesuch bis dahin?

Hinweis: Ursprünglich hatte der Barbesucher Centstücke im Wert von weniger als 1 Euro dabei. Der Wert der Centstücke kann sich nach einer Viertelstunde aber ohne weiteres auf über 1 Euro belaufen.

Aufgabe 3   Der gemeinsame Brunnen

In einem dreieckigen Grundstück soll ein Brunnen B gegraben werden. Dieser wird durch gerade Wege mit den Ecken X, Y und Z verbunden. Die Flächeninhalte der entstehenden Dreiecke sollen sich dabei wie 1 : 2 : 3 verhalten (siehe Abbildung).

Beschreibe ausführlich anhand einer geeigneten Zeichnung, wie man die Lage des Brunnens findet.



Letzter Abgabetermin für die 2. Runde ist der 15.4.2016

Für jede Aufgabe muss ein gesondertes Blatt DIN A4 verwendet werden, das jeweils mit Namen, Klasse und Schule zu beschriften ist. Bitte heftet die Lösungsblätter mit einer Büroklammer zusammen. Zu einer vollständigen Lösung gehören die Angabe aller wesentlichen Zwischenschritte und vor allem **ausführliche Begründungen.**

Den Lösungen ist folgender Abschnitt unterschrieben beizulegen:

Ich nehme / Wir nehmen an der 2. Runde der 24. Fürther Mathematik-Olympiade (2015/2016) in Eichstätt für die 7. Klasse teil:

Vorname(n), Name(n): ____ Klasse: ________

Schule/Ort: ____

Ich bestätige/ Wir bestätigen hiermit, alle Aufgaben selbstständig gelöst zu haben.

Unterschrift(en):____

Vierundzwanzigste Fürther **M**athematik-**O**lympiade in **Ei**chstätt

Klassenstufe 8
Die Aufgaben der 2.

Aufgabe 1 … durch 13 teilbar

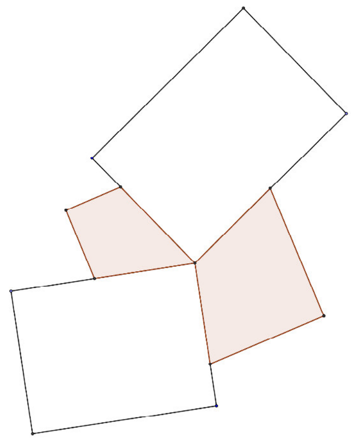
Streicht man von einer natürlichen Zahl $n \geq 100$ die letzten beiden Ziffern, erhält man die Zahl u. Die gestrichenen Ziffern bilden die Zahl v.
Beispiele: $n = 2016$: $u = 20$, $v = 16$ oder $n = 21006$: $u = 210$, $v = 06 = 6$.

Zeige:

a) Die Zahl n ist durch 13 teilbar, wenn $9u + v$ durch 13 teilbar ist.

b) Wenn n ein Vielfaches von 13 ist, dann ist auch $4u - v$ ein Vielfaches von 13.

Aufgabe 2 Verdeckte Notiz



Bertram hat an seiner Pinnwand einen quadratischen Notizzettel befestigt.
Im Laufe der Zeit wird er von zwei rechteckigen Blättern wie in der Zeichnung so überdeckt, dass sich zwei Ecken der Rechtecke genau im Mittelpunkt des quadratischen Zettels treffen.

Wie viel Prozent des grauen Quadrates sind noch sichtbar?

Aufgabe 3 Quadratzahl XXL

Bestimme (ohne Computerprogramm) die Quersumme der kleinsten positiven ganzen Zahl, deren Quadrat auf 2016 endet. Erkläre ausführlich, wie du sie gefunden hast.

Letzter Abgabetermin für die 2. Runde ist der 15.4.2016

Für jede Aufgabe <u>muss</u> ein gesondertes Blatt DIN A4 verwendet werden, das jeweils mit Namen, Klasse und Schule zu beschriften ist. Bitte heftet die Lösungsblätter mit einer Büroklammer zusammen. Zu einer vollständigen Lösung gehören die Angabe aller wesentlichen Zwischenschritte und vor allem **ausführliche Begründungen.**

Den Lösungen ist folgender Abschnitt unterschrieben beizulegen:

Ich nehme / Wir nehmen an der 2. Runde der 24. Fürther Mathematik-Olympiade (2015/2016) in Eichstätt für die 8. Klasse teil:

Vorname(n), Name(n): ____ Klasse: ________

Schule/Ort: ____

Ich bestätige/ Wir bestätigen hiermit, alle Aufgaben selbstständig gelöst zu haben.

Unterschrift(en):____